

# Un secolo di Fisica Moderna

*Corso di formazione per docenti di fisica della scuola secondaria superiore*

**La meccanica quantistica**

**Esperto**

***Edoardo Piparo***

# La meccanica quantistica

## *La natura duale della radiazione elettromagnetica*

All'inizio del 1900, l'evidenza sperimentale prova che la luce, in certi fenomeni, manifesta proprietà corpuscolari; mentre, d'altra parte, fenomeni come *interferenza* e *diffrazione* possono essere spiegati solo in termini di propagazione ondosa.

La radiazione elettromagnetica, pertanto, sembra possedere una “doppia personalità”, comportandosi a volte come onda a volte come un fascio di particelle!

Onde e particelle, nel senso comune, sono però entità contrapposte: le prime si irradiano a piacere e non sembrano avere problemi di frazionabilità, in quanto fenomeni continui e delocalizzati; le seconde sono entità discrete localizzate nello spazio e nel tempo.

I due modelli, pur escludendosi a vicenda, devono però essere visti come **complementari**, nel senso che i processi di osservazione possono evidenziare solo l'uno o l'altro dei due aspetti.

# La meccanica quantistica

## *Le onde di de Broglie*

Nel 1924 *Louis de Broglie* formulò nella propria tesi di laurea un'ipotesi rivoluzionaria, presupponendo che il dualismo onda-corpuscolo dovesse essere esteso anche alle particelle materiali.

Partendo da considerazioni di tipo relativistico, egli, pertanto, suppose che a ogni particella materiale con quantità di moto  $p$  ed energia  $E$  sia associata un'**onda pilota** di lunghezza d'onda  $\lambda$  e frequenza  $\nu$  tali che:

$$\lambda = h / p \quad e \quad \nu = E / h$$

dove  $h$  è la *costante di Planck*.

Le relazioni di *Einstein* per il *fotone* diventano così un caso particolare di tali **relazioni di de Broglie**.



# La meccanica quantistica

## *Le onde di de Broglie*

L'idea di associare una lunghezza d'onda alla materia può sembrare assurda. Se però si considera un oggetto macroscopico, ad esempio una mela di 50 g che si muove lentamente a una velocità di 1 mm/s, si trova che la lunghezza dell'onda associata è  $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-29}$  m, minore del diametro di un atomo di un fattore  $10^{19}$  e quindi troppo piccola per essere osservata in un qualsiasi esperimento noto.

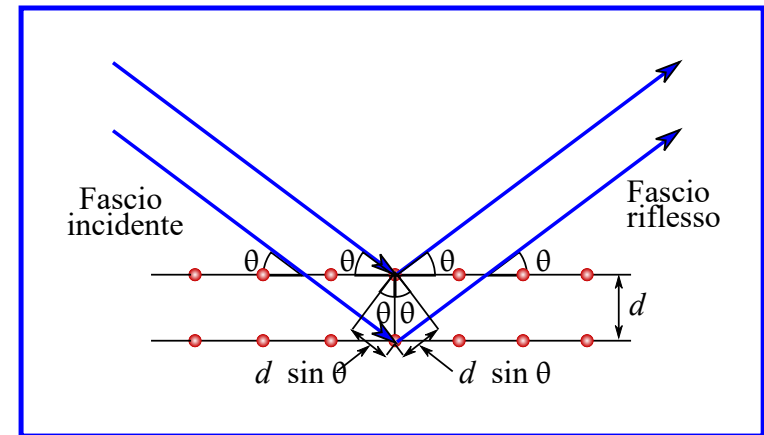
Considerando invece un elettrone, di massa  $m_e$ , con un'energia cinetica  $K$  di 10 eV, valore normale a livello atomico, ricavando la quantità di moto  $p$  dalla relazione  $K = p^2 / 2m_e$ , si ottiene una lunghezza  $\lambda = 3,9 \cdot 10^{-10}$  m, valore confrontabile con le dimensioni di un atomo e di una molecola o **le distanze tra i piani di un cristallo...**



# La meccanica quantistica

## Le onde di de Broglie

Se si invia un fascio coerente di raggi X contro i piani regolarmente spazati di un cristallo, il fascio riflesso è costituito da raggi che hanno seguito percorsi di differente lunghezza. L'interferenza tra i raggi sarà distruttiva se la differenza di cammino è un multiplo dispari di mezza lunghezza d'onda; costruttiva se è un multiplo di lunghezza d'onda.



Dall'analisi della figura risulta che la differenza di cammino fra raggi riflessi da piani adiacenti, che distano tra loro  $d$ , è  $d \sin \theta$ . Si ha interferenza costruttiva, pertanto, quando si verifica la condizione (**legge di Bragg**):

$$2d \sin \theta = n \lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

# La meccanica quantistica

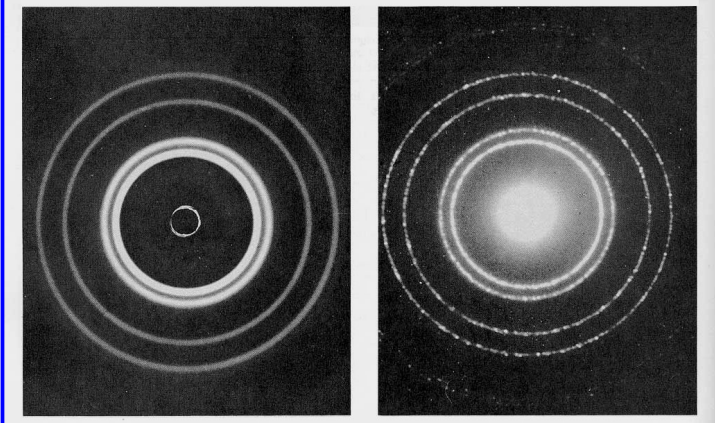
## Verifiche sperimentali

A causa del piccolo valore della costante di Planck, anche elettroni (particelle molto leggere) di bassa energia posseggono lunghezze d'onda paragonabili a quelle dei raggi X.

La prima prova sperimentale della natura ondulatoria delle particelle fu fornita, nel **1927**, da **Davisson** e **Germer**, che verificarono che gli elettroni riflessi da un cristallo di nichel formano una figura di diffrazione, con una lunghezza d'onda in accordo con quella prevista dalle *relazioni di de Broglie*.

Nel **1932**, **Stern** e collaboratori, evidenziarono, con esperimenti di diffrazione con raggi molecolari di idrogeno ed elio, il comportamento ondulatorio di atomi e molecole: **le onde di de Broglie erano diventate una indiscutibile realtà fisica.**

A destra figura di diffrazione prodotta da raggi X attraverso una lamina di alluminio. A sinistra la figura di diffrazione prodotta da elettroni attraverso la stessa lamina





# La meccanica quantistica

## La velocità dell'onda pilota

Una particella libera che si muova nella direzione dell'asse  $x$  avrà associata un'onda pilota piana con fase:

$$\varphi = k x - \omega t + \varphi_0$$

dove  $k = 2\pi / \lambda$  è il vettore d'onda e  $\omega = 2\pi\nu$  la sua pulsazione.

L'onda avanza nello spazio con una velocità  $u$  detta **velocità di fase**. Il valore di  $u$  si trova facilmente osservando che dopo un intervallo di tempo  $dt$  il fronte d'onda subisce uno spostamento  $u dt$  tale da mantenere costante la fase e pertanto:

$$k u dt - \omega dt = 0 \Rightarrow u = \omega / k$$

In base alle *relazione di de Broglie* si ottengono le seguenti espressioni per  $k$  e  $\omega$ :

$$k = p / \hbar \quad \text{e} \quad \omega = E / \hbar \quad \text{essendo:} \quad \hbar = h / 2\pi.$$



# La meccanica quantistica

## *La velocità dell'onda pilota*

Dalle espressioni relativistiche di energia e quantità di moto si ottiene:

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c}{\beta} \quad \text{essendo } \beta := \frac{v}{c} < 1$$

**La velocità di fase  $u$  dell'onda è pertanto maggiore della velocità  $c$  della luce nel vuoto!**

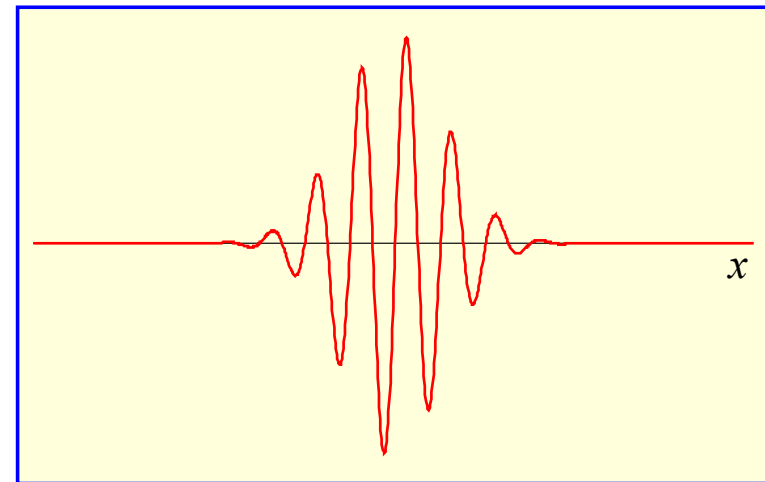
Questo risultato può sembrare paradossale, in quanto, peraltro, implica che l'*onda pilota* non si muova insieme alla particella. Ciò, però, implica soltanto che **la velocità di fase non ha significato fisico!**



# La meccanica quantistica

## *Pacchetti d'onda*

Un'onda piana, però, non rappresenta adeguatamente il moto di una particella. Le *onde pilota* devono essere spazialmente associate alla particella di cui “controllano” il moto. Esse devono, pertanto, essere “raggruppate” in un *pacchetto* come nella figura a lato.



Il *teorema di Fourier* dimostra che per generare un pacchetto d'onda di questo tipo è necessario sovrapporre un'infinità di onde piane di *ampiezza*, *pulsazione* e *fase iniziale*  $\varphi_0$  variabili con il *vettore d'onda*  $k$ . Le onde interferiscono costruttivamente solo in una regione limitata attorno alla particella, interferendo distruttivamente altrove. Il massimo di ampiezza del pacchetto corrisponde al punto dove le ampiezze delle onde componenti si sommano, giungendo tutte in fase.



# La meccanica quantistica

## *Pacchetti d'onda*

In corrispondenza del massimo, di ascissa  $x_M$ , del pacchetto d'onda la *fase* è, pertanto, indipendente da  $k$ , ovvero si ha la **condizione di fase stazionaria**:

$$\frac{d\varphi}{dk} = 0 \Rightarrow x_M = \frac{d\omega}{dk}t - \frac{d\varphi_0}{dk}$$

Il massimo di ampiezza, e quindi tutto il pacchetto, si muove pertanto con una velocità  $w$ , detta **velocità di gruppo**, che, in base alle *relazioni di de Broglie* e alla *relazione relativistica energia-quantità di moto*, risulta data da:

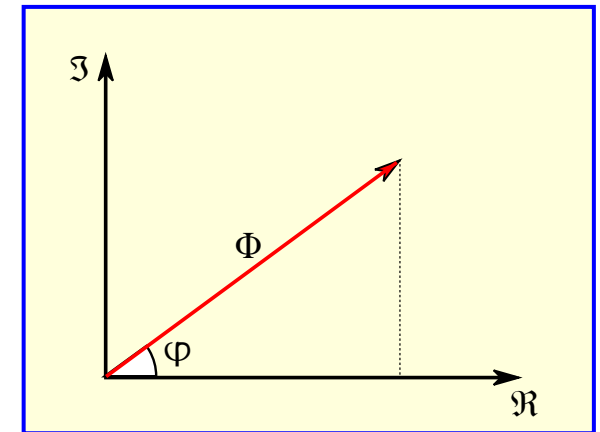
$$w = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = v$$

La **velocità di gruppo** del pacchetto di *onde pilota* è quindi uguale alla velocità della particella, il che dimostra la consistenza interna del *postulato di de Broglie*.

# La meccanica quantistica

## Vettori di fase e funzioni d'onda

È conveniente rappresentare un'onda piana, mediante i **vettori di fase**. Un vettore di fase è un vettore avente *modulo* uguale all'*ampiezza* dell'onda e formante, con una direzione fissa di riferimento, un angolo pari alla *fase*  $\varphi$  dell'onda stessa, relativamente al punto e all'istante considerato. La componente del vettore lungo direzione di riferimento in tal modo coincide con il valore della grandezza oscillante nell'istante e nel punto considerato.



Traslando in avanti il punto di osservazione il *vettore di fase* ruota uniformemente, in senso antiorario descrivendo, un giro completo quando lo spostamento è pari a  $\lambda$ . Al trascorrere del tempo il *vettore di fase*, invece, ruota in senso orario con velocità angolare costante  $\omega$ .

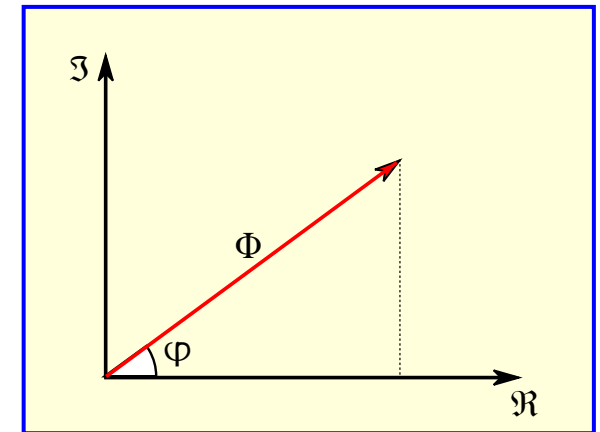


# La meccanica quantistica

## Vettori di fase e funzioni d'onda

Gli assi cartesiani di questo piano cartesiano possono essere interpretati come *asse reale*  $\Re$  e *asse immaginario*  $\Im$  di un **piano di Argand-Gauss**. In questo modo ad ogni *vettore di fase* di ampiezza  $A$  e di *fase*  $\varphi$  rimane associata, in virtù della **formula di Eulero**, una funzione complessa:

$$\Phi(x, t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i(kx - \omega t + \varphi_0)}$$

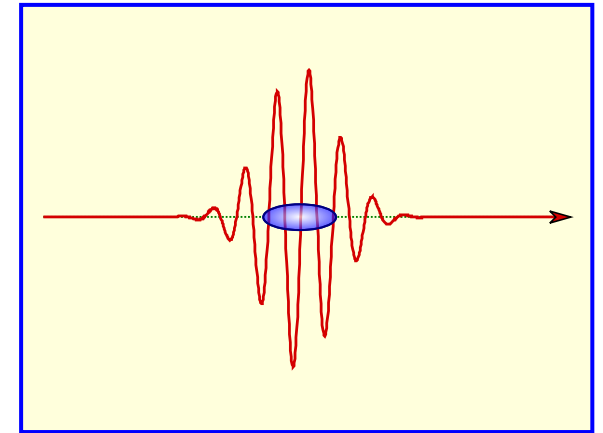


In base al *teorema di Fourier* un'onda più generale sarà data dalla sovrapposizione (somma) di onde piane e sarà quindi rappresentate, nel *piano di Argand-Gauss*, da un *vettore di fase* di ampiezza variabile e fase dipendente da spazio e tempo in maniera non lineare. La funzione complessa  $\Psi$  associata a tale *vettore di fase* prende il nome di **funzione d'onda** ed è esprimibile come somma di onde piane della forma della  $\Phi(x, t)$ .

# La meccanica quantistica

## L'equazione di Schrödinger

Per ottenere l'equazione che descrive la propagazione e l'evoluzione della *funzione d'onda*  $\Psi$ , è opportuno fare riferimento alle rotazioni dei *vettori di fase* delle onde piane, rappresentate dalle funzioni  $\Phi$ , componenti indotte dalla propagazione nello spazio e dalla evoluzione nel tempo.



Fissando una volta il tempo e una volta lo spazio, si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} k\Phi = -i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \omega\Phi = i \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases}$$



# La meccanica quantistica

## L'equazione di Schrödinger

Per una particella di massa a riposo  $m$ , soggetta a forze conservative di energia potenziale  $U(x)$ , nel limite non relativistico, la *relazione energia-quantità di moto* è:

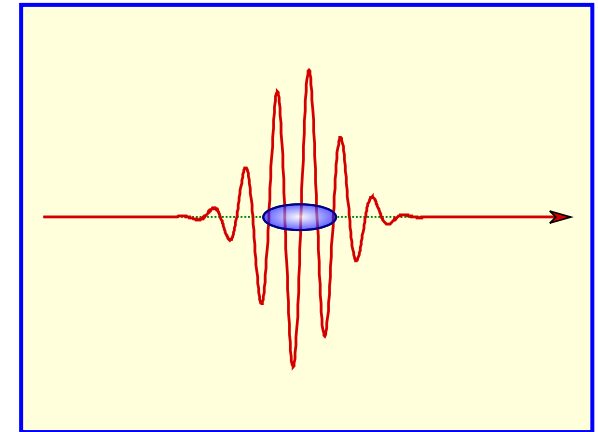
$$E = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

Da cui, in base alle *relazioni di de Broglie*, si ottiene:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U(x)$$

Moltiplicando ambo i membri per  $\Phi$ , si trova quindi la relazione differenziale:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + U(x) \Phi = i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$



# La meccanica quantistica

## L'equazione di Schrödinger

Poiché tutte le onde piane  $\Phi$  soddisfano la stessa equazione:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + U(x) \Phi = i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

La medesima equazione sarà soddisfatta anche dalla *funzione d'onda*  $\Psi$  della particella:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

che è la famosa **equazione di Schrödinger** (1926).



**Erwin R. J. A. Schrödinger**  
(Premio Nobel nel 1933)



# La meccanica quantistica

## *L'interpretazione fisica della funzione d'onda*

Schrödinger immaginò che le particelle fossero dei *pacchetti d'onda*. Tuttavia i pacchetti d'onda tendono a dissiparsi nel corso del tempo, a causa delle differenti velocità delle varie onde componenti, e inoltre tale interpretazione pone delle gravi difficoltà nell'interpretazione dei fenomeni d'urto.

L'interpretazione oggi più accettata è dovuta a **M. Born** (1926), per il quale ogni processo meccanico è accompagnato da un processo ondulatorio, descritto da una funzione d'onda, che evolve e si propaga secondo l'*equazione di Schrödinger*. La funzione d'onda  $\Psi$  rappresenta un'**ampiezza di probabilità**, nel senso che  $|\Psi|^2 \Delta V$  dà la probabilità di trovare la particella all'interno dell'elemento di volume  $\Delta V$ .



**Max Born**  
(1882 - 1970)

# La meccanica quantistica

## Stati stazionari

Spesso è utile considerare stati di energia  $E$  ben definita. Per stati siffatti, tenuto conto delle *relazioni di de Broglie*, l'*equazione di Schrödinger* assume la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + U(x) \Psi = E \Psi$$

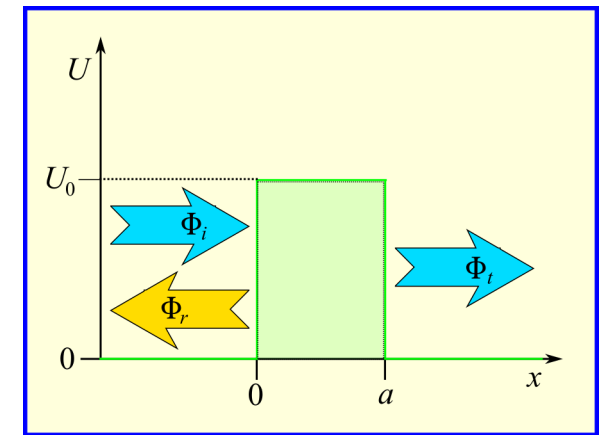
Per gli tali stati la *pulsazione*  $\omega = E / \hbar$  è costante e l'ampiezza è indipendente dal tempo: essi sono perciò detti **stati stazionari**.

Tale equazione, che descrive l'andamento spaziale della funzione d'onda, ha la struttura di un **problema agli autovalori**: si tratta di determinare quei valori di  $E$  (**autovalori**) per i quali l'equazione ammette soluzioni (**autovettori**) che soddisfano determinate condizioni di regolarità e compatibilità con i vincoli fisici imposti al sistema.

# La meccanica quantistica

## Barriera di potenziale

Si consideri una particella che, provenendo da sinistra, incida su di una *barriera di potenziale*, ovvero una regione di larghezza  $a$  in cui l'energia potenziale passa bruscamente da zero a un valore positivo  $U_0$  per poi tornare ad annullarsi.



Classicamente se l'*energia cinetica*  $E$  della particella è maggiore o uguale di  $U_0$ , la particella supera la barriera, altrimenti viene riflessa all'indietro.

Nell'ambito della meccanica quantistica, il comportamento della particella è descritto in termini di onde. Il moto della particella che incide sulla barriera è descritto da un'onda progressiva. Tale onda viene in parte trasmessa e in parte riflessa dalla barriera, interferendo con l'onda incidente.

# La meccanica quantistica

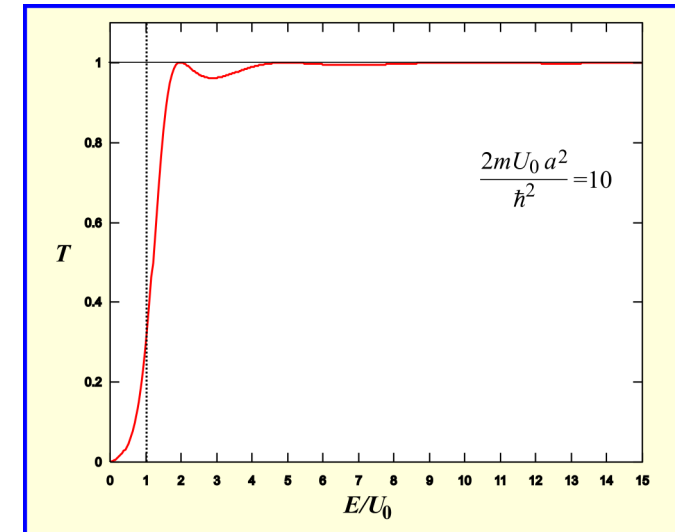
## Effetto tunnel ed effetto Ramsauer

La **probabilità di trasmissione**  $T$  classicamente dovrebbe essere 0 per  $E \leq U_0$  e 1 per  $E > U_0$ .

La **meccanica quantistica** prevede, invece, un andamento più complesso, rappresentato in figura, dipendente dall'**opacità**  $o$  della barriera:

$$o := \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}$$

Per  $E < U_0$ , la **probabilità di trasmissione** non è nulla (**effetto tunnel**) e cresce con l'energia. Questo perché all'interno della barriera si forma un'**onda evanescente**, la cui ampiezza decade esponenzialmente con la distanza, che può attraversare la barriera stessa.



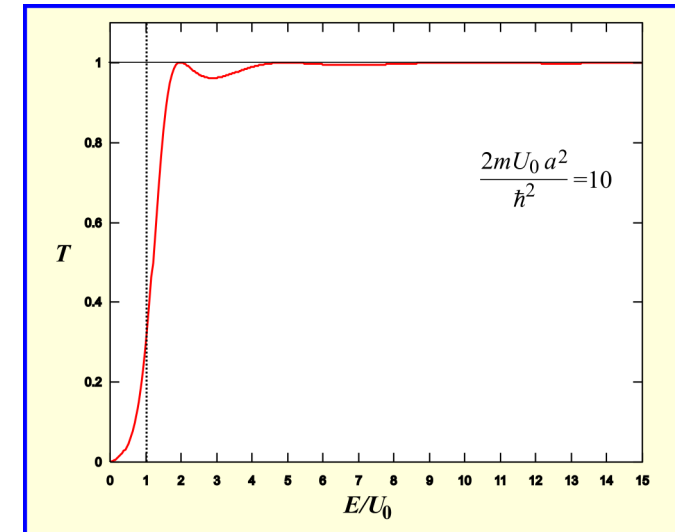
# La meccanica quantistica

## Effetto tunnel ed effetto Ramsauer

Per  $E > U_0$ , la probabilità di trasmissione è generalmente minore di uno, a causa della riflessione dovuta alla discontinuità dell'energia potenziale della barriera. Risulta, però,  $T = 1$  quando la larghezza di barriera  $a$  contiene un numero intero di mezze lunghezze d'onda.

Tale effetto è dovuto ad una interferenza distruttiva tra le onde riflesse agli estremi della barriera ed è strettamente correlato al cosiddetto **effetto Ramsauer**, ovvero all'andamento fortemente oscillante con l'energia del libero cammino medio degli elettroni che si muovono in un gas.

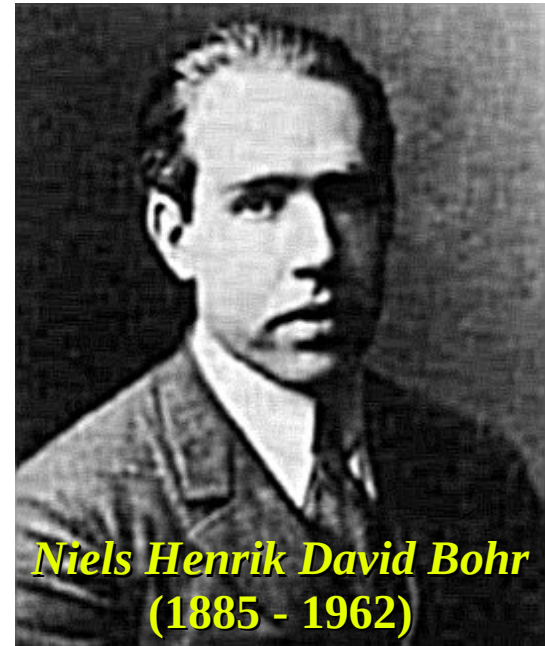
**Per valori dell'opacità di barriera molto maggiori di 1, i risultati della meccanica quantistica tendono a ridursi a quelli della meccanica classica.**



# La meccanica quantistica

## *Il principio di corrispondenza*

La visione fisica del mondo sembra pertanto essere dicotomica: da una parte la meccanica classica descriverebbe il *macrocosmo* mentre la meccanica quantistica descrive il *microcosmo*. *Niels Bohr*, però, intuì che non si può stabilire in maniera netta una linea di demarcazione tra “mondo classico” e “mondo quantistico”; piuttosto **l'uno sfuma nell'altro con l'aumentare dell'energia**.



*Niels Henrik David Bohr*  
(1885 - 1962)

Il *principio di corrispondenza di Bohr* (1923) afferma, infatti, che:

*I risultati della meccanica quantistica devono ridursi a quelli della meccanica classica nelle situazioni in cui l'interpretazione classica può essere considerata valida.*

# La meccanica quantistica

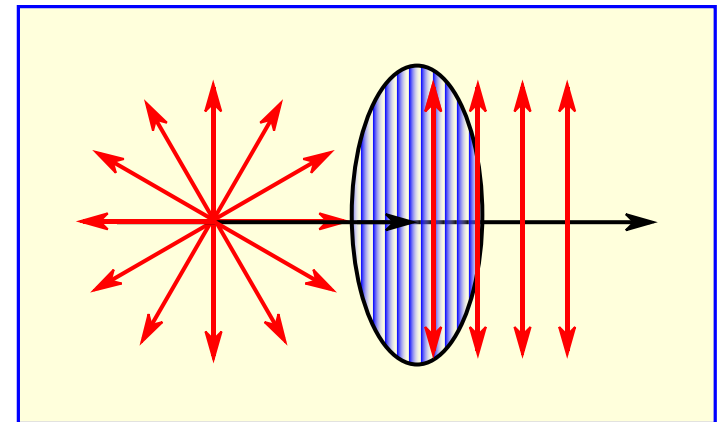
## *La polarizzazione dei fotoni*

Le proprietà di polarizzazione della luce sono strettamente connesse con le sue proprietà corpuscolari. Nell'effetto fotoelettrico con luce polarizzata esiste, infatti, una direzione di emissione privilegiata.

**Si deve pertanto attribuire una polarizzazione anche ai fotoni.**

Si può quindi affermare che, in fascio di luce polarizzata, ogni fotone si trova in un determinato stato di polarizzazione.

Se si fa incidere *luce non polarizzata* su di un **polaroid**, la luce emergente risulta sempre polarizzata lungo la *direzione di trasmissione* (o permessa) del *polaroid*. Con un polaroid, quindi, è possibile produrre **fotoni con uno stato di polarizzazione definito** a partire da luce non polarizzata.

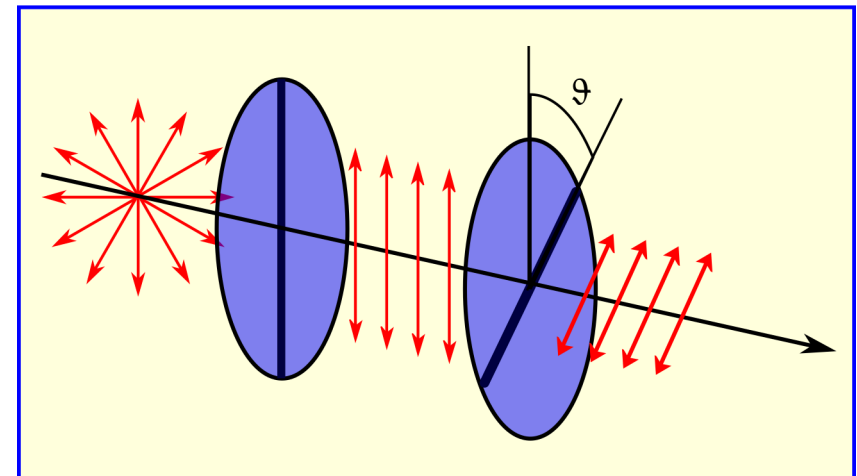




# La meccanica quantistica

## La legge di Malus

L'elettrodinamica classica prevede che se la polarizzazione del raggio incidente è parallela alla *direzione di trasmissione* del polaroid, esso lo attraverserà indisturbato; se è perpendicolare, verrà interamente assorbito. Se la direzione di polarizzazione del fascio incidente forma un angolo  $\vartheta$  con la *direzione permessa* del polaroid, il fascio trasmesso risulta attenuato secondo la **legge di Malus**:



$$I = I_0 \cos^2 \vartheta$$

essendo  $I_0$  l'intensità del fascio incidente e  $I$  quella del fascio trasmesso.

# La meccanica quantistica

## *I fotoni e la legge di Malus*

Un raggio di luce polarizzato linearmente in una certa direzione si deve immaginare costituito da *fotoni* ciascuno in uno *stato di polarizzazione lineare* in tale direzione.

Questo modello non comporta difficoltà se il raggio incidente è polarizzato perpendicolarmente o parallelamente alla direzione permessa del polaroid: ogni fotone polarizzato parallelamente all'asse di trasmissione passa attraverso il polaroid; mentre ogni fotone polarizzato perpendicolarmente all'asse viene assorbito.

Cosa accade, però, ai fotoni polarizzati obliquamente?

Se si utilizza un fascio di intensità così bassa da far sì che sul polaroid incida un solo fotone per volta, in base alla *legge di Malus*, ci si attende che solo una frazione di fotoni pari a  $\cos^2 \vartheta$  attraversi il polaroid. Nell'attraversare il *polaroid*, inoltre, lo stato di polarizzazione dei *fotoni* diventa parallelo all'asse permesso del filtro.

# La meccanica quantistica

## *Sovrapposizione di stati*

Un fascio di luce polarizzato obliquamente si può scomporre nella sovrapposizione di due fasci polarizzati lungo due direzioni tra loro perpendicolari: lo stato di polarizzazione obliqua a  $45^\circ$  rispetto all'asse orizzontale (D), ad esempio, sarà esprimibile come sovrapposizione di uno stato di polarizzazione orizzontale (H) e uno verticale (V).

Si potrebbe pensare che il fascio con polarizzazione D sia per metà costituito da *fotoni* nello stato H e per l'altra metà da *fotoni* nello stato V.

Ma un fascio con polarizzazione D passa senza alcuna attenuazione attraverso un *polaroid* il cui asse permesso formi un angolo di  $45^\circ$  con l'orizzontale; mentre, per la *legge di Malus*, solo metà dei fotoni H e dei fotoni V – e quindi metà del fascio complessivo – dovrebbe attraversarlo!

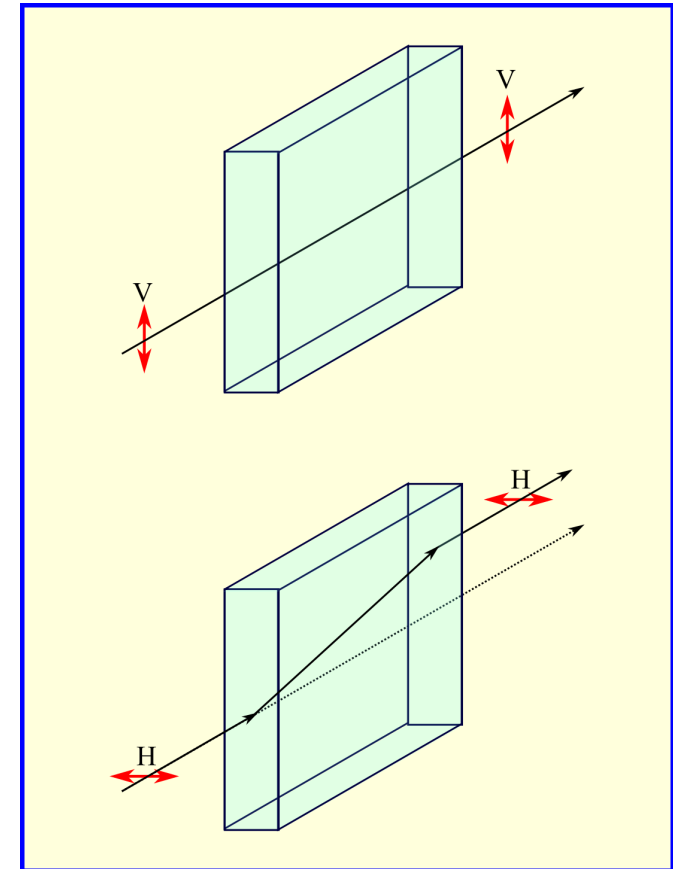
**La sovrapposizione di due stati non equivale a una miscela statistica degli stessi!**

# La meccanica quantistica

## Traiettorie indefinite

Per il fenomeno della **birifrangenza**, un cristallo di *calcite* può essere tagliato e disposto in modo che la luce incidente polarizzata verticalmente (V) segua il **raggio ordinario**, mentre quella polarizzata orizzontalmente (H) segua il **raggio straordinario** e venga quindi deflessa.

Facendo incidere sul cristallo un fascio polarizzato a  $45^\circ$ , di intensità così bassa da far sì che sul cristallo incida un solo fotone per volta, questo si divide in due fasci di uguale intensità: quello *ordinario*, costituito da fotoni nello stato V, e quello *straordinario*, costituito da fotoni nello stato H.



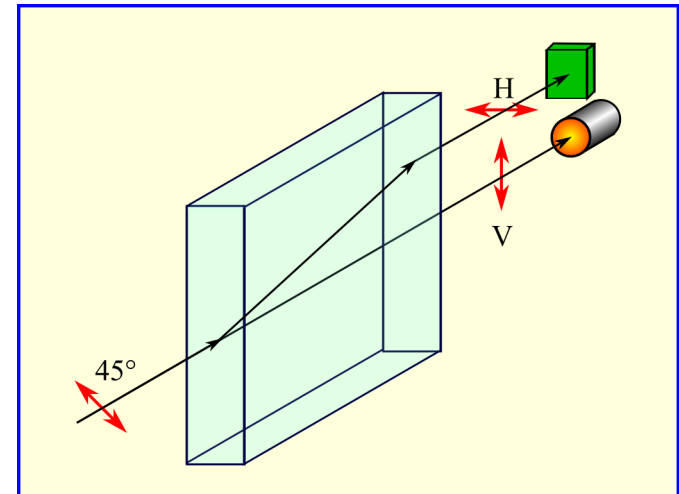
# La meccanica quantistica

## Traiettorie indefinite

Ponendo uno schermo su uno dei due cammini e un *contatore di fotoni* sull'altro, quest'ultimo scatta il 50% delle volte: il fotone, quindi, non si “divide” nel dispositivo, seguendo entrambi i cammini.

Ponendo uno schermo su entrambi i cammini, non viene rilevato alcun fotone: i fotoni non possono, pertanto, raggiungere i contatori seguendo cammini diversi da quelli considerati.

Disponendo, subito dopo il primo cristallo, un opportuno cristallo di *calcite inversa*, che compensi le deflessioni prodotte dal primo, il fotone in uscita riacquisterà lo stato di polarizzazione a  $45^\circ$ : il fotone, quindi, non può aver seguito l'uno o l'altro dei due cammini, che avrebbero mutato la sua polarizzazione in H o V.

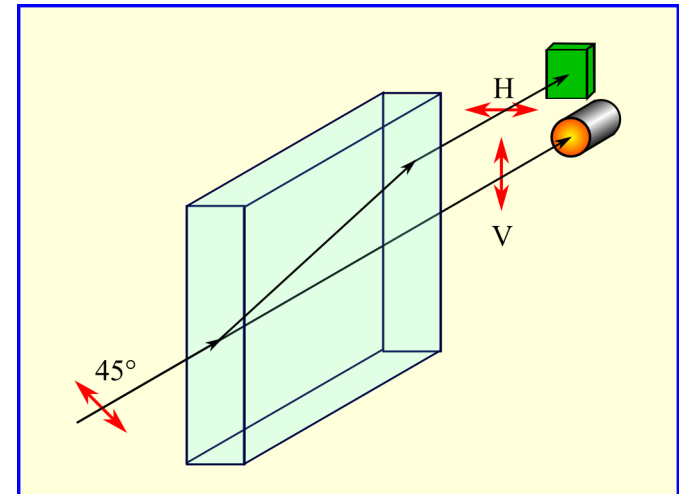


# La meccanica quantistica

## *Traiettorie indefinite*

In conclusione, nello stato di polarizzazione a  $45^\circ$ , il fotone:

- Non segue il cammino del raggio straordinario
- Non segue il cammino del raggio ordinario
- Non segue simultaneamente entrambi i cammini
- Non segue un cammino diverso da questi



**Non è, pertanto, possibile attribuire al fotone una traiettoria definita!**

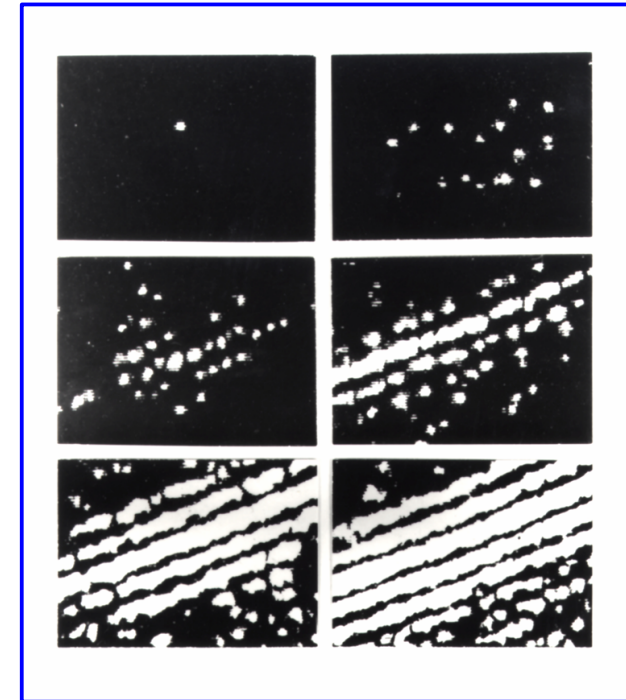
# La meccanica quantistica

## *Il più bell'esperimento della fisica*

Nel maggio 2002, al primo posto della graduatoria di *Physics World* su quale fosse stato il “più bell'esperimento della fisica” figurava l'*Esperimento della doppia fenditura di Young applicata all'interferenza di singoli elettroni*.

La rivista riportava un'analisi storica degli esperimenti di quel tipo, attribuendo il merito del primo al fisico giapponese *Akira Tonomura e collaboratori* (1989).

*John Steeds* e lo stesso *Tonomura* ne hanno, poi, attribuito la paternità a un gruppo del Dipartimento di Fisica di Bologna, composto da ***Pier Giorgio Merli, Gian Franco Missiroli e Giulio Pozzi*** (1974). Le lettere del prof. Steeds, del gruppo di Merli e del dr Tonamura furono pubblicate nel numero di maggio 2003.





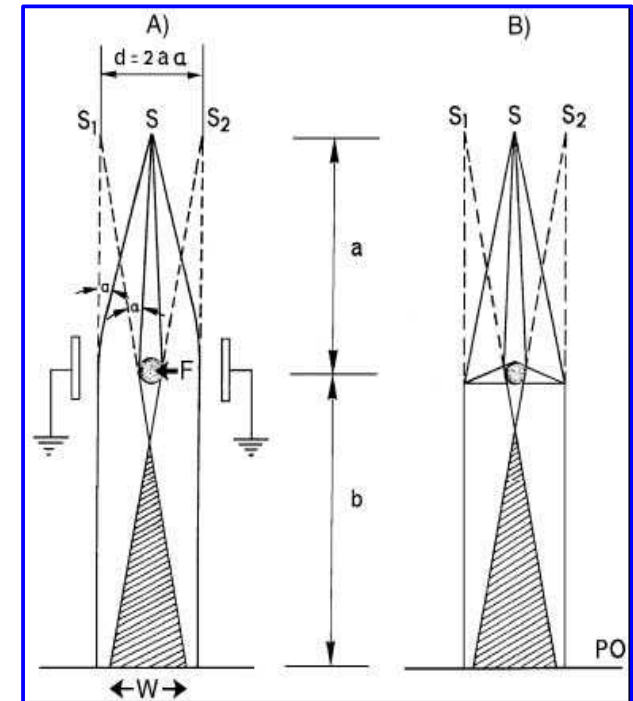
# La meccanica quantistica

## Il più bell'esperimento della fisica

Utilizzando un fascio di intensità così bassa da avere il passaggio di un elettrone alla volta, inviato su di un filamento carico per deflettere e far convergere le traiettorie, come un *biprisma di Fresnel*, e registrandone gli arrivi su una lastra, via via che gli eventi si accumulavano si generava una figura di interferenza.

Poiché ogni elettrone arriva singolarmente, **la figura d'interferenza non è dovuta a un'interazione tra le particelle.**

Ogni elettrone può passare sia da una parte, sia dall'altra del filamento. Se, però, si scherma uno dei due percorsi la figura d'interferenza scompare: essa **si produce solo se non si cerca di individuare la traiettoria effettiva dell'elettrone.**



# La meccanica quantistica

## *Il principio di sovrapposizione*

Il *principio di sovrapposizione della meccanica quantistica*:

*Un sistema dinamico che si trovi in uno stato definito può venir considerato come facente parte contemporaneamente di due o più altri stati, in una maniera inconcepibile dal punto di vista delle idee classiche. Il primo stato può quindi considerarsi una **sovrapposizione** degli altri.*

Se uno stato è costituito dalla *sovrapposizione* di altri due, esso avrà proprietà intermedie tra quelle dei due stati originari e che si avvicinano più o meno a quelle di uno di essi a seconda del maggior o minor “peso” associato allo stato nel processo di sovrapposizione. Il nuovo stato è completamente definito dai due stati originari, una volta assegnato il loro **peso relativo** nel processo di sovrapposizione.



# La meccanica quantistica

## *Il principio di sovrapposizione*

La natura non classica del processo di sovrapposizione risulta chiaramente se si considera la sovrapposizione di due stati,  $A$  e  $B$ , tali che esista un'osservazione che, effettuata sul sistema nello stato  $A$ , porti certamente a un particolare risultato  $a$ , mentre, effettuata sul sistema nello stato  $B$ , conduca certamente a un risultato differente  $b$ .

**Quale sarà allora il risultato di un'osservazione eseguita sul sistema nello stato risultante dalla sovrapposizione dei due?**

Questo risultato sarà talvolta  $a$  e talvolta  $b$  – e mai diverso da  $a$  o da  $b$  – in accordo con una *legge di probabilità* dipendente dai pesi relativi di  $A$  e di  $B$  nel processo di sovrapposizione.



# La meccanica quantistica

## *Il principio di sovrapposizione*

**Il carattere intermedio dello stato risultante dalla sovrapposizione si esprime dunque nel fatto che in un'osservazione si otterrà uno ed uno solo dei risultati corrispondenti agli stati originari con una certa probabilità, non nel fatto che il risultato stesso sia intermedio tra i corrispondenti risultati per i suddetti stati.**

La forma matematica del principio di sovrapposizione fra gli stati porta a stabilire analogie con sistemi della meccanica classica, quali corde e membrane vibranti, per i quali ne vale uno analogo. Queste analogie hanno portato a dare talvolta il nome di “meccanica ondulatoria” alla meccanica quantistica. È, tuttavia, importante rilevare che la sovrapposizione che ha luogo in meccanica quantistica è di natura essenzialmente diversa da qualunque altra incontrata nella teoria classica.

**Le analogie possono condurre a interpretazioni errate!**

# La meccanica quantistica

## *Il gatto di Schrödinger*

Il paradosso del *gatto di Schrödinger* è un esperimento ideale proposto da *Erwin Schrödinger* per dimostrare che l'interpretazione classica della meccanica quantistica risulta essere *incompleta* quando deve descrivere sistemi fisici in cui il livello subatomico interagisce con il livello macroscopico.

Si supponga di avere un gatto chiuso in una scatola con un meccanismo per cui una fiala di veleno si rompa all'interno della scatola, uccidendo il gatto, se un atomo radioattivo decade.

Dopo un certo periodo di tempo, il gatto ha la stessa probabilità di essere morto quanto l'atomo di essere decaduto. Visto che fino al momento dell'osservazione l'atomo esiste *nei due stati sovrapposti*, il gatto resta sia vivo che morto fino a quando non si apre la scatola, ossia non si compie un'osservazione!



# La meccanica quantistica

## *Principio di indeterminazione e complementarità*

Nelle prime formulazioni della fisica dei quanti, onde e corpuscoli sono stati considerati come fatti dati, senza considerare la questione se fare l'ipotesi che cose di questo tipo esistano realmente abbia una qualche giustificazione. Secondo **Heisenberg**, invece, i concetti di corpuscolo e di onda devono essere sottoposti a rigoroso esame.

Il *concetto di corpuscolo* implica necessariamente l'idea che la cosa in questione possieda una ben determinata quantità di moto e si trovi in un ben determinato punto nell'*istante* considerato.

Sorge allora la questione: **possiamo effettivamente determinare con esattezza sia la posizione sia la velocità della particella in un dato istante? La risposta è NO!**



**Werner Karl Heisenberg**  
(1901-1976)



# La meccanica quantistica

## Complementarità

La radice del problema sta nel fatto che se si vuole dare una descrizione intuitiva di un fenomeno è necessario utilizzare il linguaggio comune, che nasce e si sviluppa nell'esperienza quotidiana e non può mai superarne il limite. La *fisica classica* si è limitata all'uso di concetti di questo tipo; analizzando i movimenti visibili ha sviluppato due modi di rappresentarli con processi elementari: particelle in moto e onde.



Ogni processo può essere interpretato o in termini *corpuscolari* o in termini *ondulatori*, ma non è possibile provare che abbiamo realmente a che fare con corpuscoli o con onde, dato che non è possibile determinare simultaneamente tutte le proprietà che sono caratteristiche di un corpuscolo o di un'onda, a seconda del caso.





# La meccanica quantistica

## Complementarità

Si deve, quindi, affermare che le descrizioni corpuscolare e ondulatoria vanno considerate solo come ***modi complementari*** di vedere uno stesso processo oggettivo, che solo in determinati casi limite ammette una interpretazione completamente visualizzabile.

In ultima analisi, infatti, la **descrizione corpuscolare** implica l'esecuzione di misure atte a ottenere informazioni sulle relazioni di energia e quantità di moto (per esempio nell'*effetto Compton*), mentre le esperienze connesse alla determinazione di posizione e di tempo comportano una **descrizione ondulatoria** (per esempio negli esperimenti di *interferenza e diffrazione*).



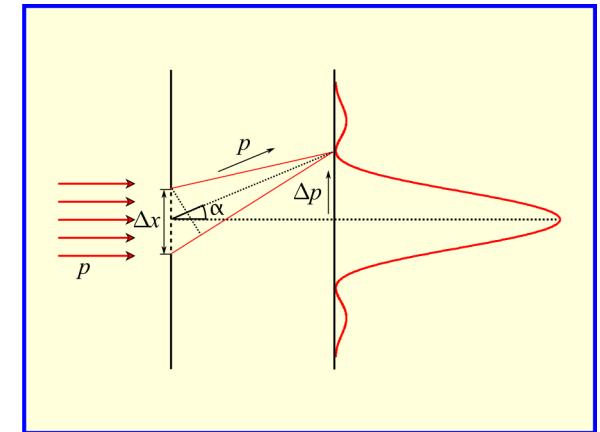
# La meccanica quantistica

## Relazione d'indeterminazione – Un esempio

Nella diffrazione attraverso una fenditura, dal punto di vista corpuscolare, la larghezza della fenditura  $\Delta x$  dà una misura dell'incertezza della posizione delle particelle perpendicolarmente alla direzione di moto.

Per formare la figura di diffrazione sullo schermo, le singole particelle, nell'attraversare la fenditura, vengono, deviate casualmente, verso l'alto o verso il basso. L'incertezza  $\Delta p$  della componente della quantità di moto, di modulo costante  $p$ , perpendicolare alla direzione del moto sarà allora dell'ordine:  $\Delta p \approx p \sin \alpha$ . Se  $\lambda$  è la lunghezza dell'onda associata, per la teoria della diffrazione e per le relazioni di de Broglie si ha:  $\Delta x \sin \alpha \approx \lambda = h/p$ , da cui:

$$\Delta x \Delta p \approx h$$



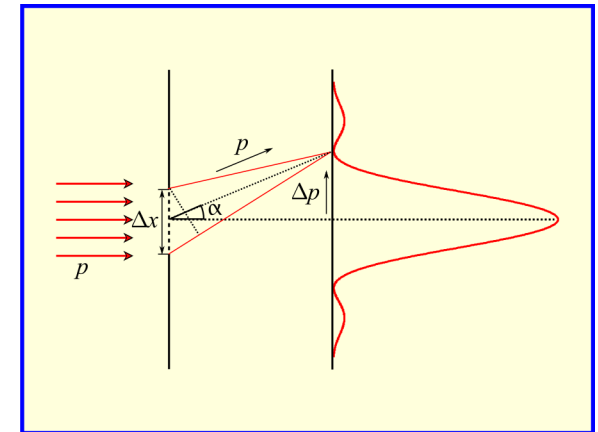
# La meccanica quantistica

## Relazione d'indeterminazione – Un esempio

Nella diffrazione attraverso una fenditura, dal punto di vista corpuscolare, la larghezza della fenditura  $\Delta x$  dà una misura dell'incertezza della posizione delle particelle perpendicolarmente alla direzione di moto.

Per formare la figura di diffrazione sullo schermo, le singole particelle, nell'attraversare la fenditura, vengono, deviate casualmente, verso l'alto o verso il basso. L'incertezza  $\Delta p$  della componente della quantità di moto, di modulo costante  $p$ , perpendicolare alla direzione del moto sarà allora dell'ordine:  $\Delta p \approx p \sin \alpha$ . Se  $\lambda$  è la lunghezza dell'onda associata, per la teoria della diffrazione e per le relazioni di de Broglie si ha:  $\Delta x \sin \alpha \approx \lambda = h/p$ , da cui:

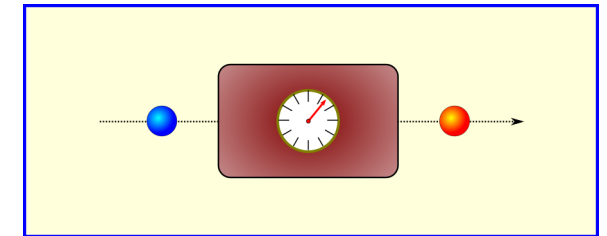
$$\Delta x \Delta p \approx h$$



# La meccanica quantistica

## *Misurare significa perturbare*

Ogni grandezza fisica deve essere sempre suscettibile di una **definizione operativa**, nel senso che deve essere sempre possibile, mediante un opportuno processo di osservazione, misurare la grandezza considerata.



Nella fisica classica si presupponeva che la misurazione di una grandezza potesse essere effettuata con precisione arbitraria, a patto di adottare adeguati strumenti di misurazione e opportuni accorgimenti sperimentali.

L'esempio precedente, però, dimostra che **misurare significa sempre perturbare** il sistema e quindi le grandezze che lo caratterizzano: esiste, infatti, sempre, fra l'oggetto e lo strumento di misurazione, un'**interazione** che modifica qualche proprietà dell'oggetto stesso.

Solo se l'oggetto è “**macroscopico**” la perturbazione è a tutti gli effetti trascurabile.

# La meccanica quantistica

## *La relazione di Heisenberg*

La **relazione di indeterminazione di Heisenberg** (1927) sancisce l'impossibilità di valutare in modo rigoroso e senza alcun limite quelle grandezze la cui determinazione è necessaria per una descrizione meccanicistica del sistema.

Con un calcolo relativamente complesso *Heisenberg* dimostrò rigorosamente, a partire dai *postulati della meccanica quantistica*, che per la coppia di osservabili  $x$  e  $p$  si ha:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Dove  $\Delta x$  e  $\Delta p$  rappresentano le **deviazioni quadratiche medie** delle grandezze.

Una relazione analoga vale, inoltre, per ogni coppia di osservabili **coniugate canonicamente** (come, ad esempio, *angolo-momento angolare*).

# La meccanica quantistica

## *La relazione di indeterminazione energia-tempo*

Un'indeterminazione  $\Delta p$  della *quantità di moto* può pensarsi derivare, tramite il *teorema dell'impulso*, dall'azione di una forza casuale  $F$ :

$$\Delta p = F \Delta t$$

essendo  $\Delta t$  la durata dell'intervallo di tempo di osservazione. Si ha pertanto:

$$\Delta x \Delta p = F \Delta x \Delta t = \Delta E \Delta t$$

dove  $\Delta E = F \Delta x$  rappresenta il *lavoro* della forza casuale e la connessa indeterminazione nell'energia della particella.

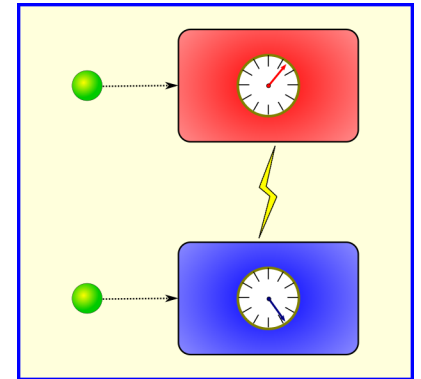
Da tale uguaglianza, segue infine la ***relazione di indeterminazione energia-tempo***:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

# La meccanica quantistica

## *Interpretazione delle relazioni di indeterminazione*

L'interpretazione delle *relazioni di indeterminazione* secondo cui la misura di una grandezza perturba necessariamente la grandezza coniugata canonicamente alla prima non è del tutto corretta, anche se lo stesso *Heisenberg* diede inizialmente questa spiegazione. **In realtà il disturbo non gioca nessun ruolo**, in quanto il principio è, ad esempio, valido anche quando la posizione viene misurata in un sistema e la quantità di moto viene misurata in una copia identica del primo sistema. È più corretto affermare che **in meccanica quantistica le particelle hanno alcune proprietà tipiche delle onde e non possiedono una ben definita coppia posizione e quantità di moto, energia e durata intervallo di tempo, etc.**





# La meccanica quantistica

## *L'interpretazione di Copenhagen*

*L'interpretazione di Copenhagen*, elaborata da *Niels Bohr* e *Werner Heisenberg* mentre collaboravano a Copenaghen attorno al 1927, tenta di rispondere ad alcune domande spinose, che sorsero come risultato dell'analisi di esperienze quali l'interferenza di singoli fotoni:

- 1) Le regole della meccanica quantistica ci dicono statisticamente dove le particelle colpiranno lo schermo, ma non sono in grado di prevedere dove una determinata particella lo andrà a colpire. **Quali sono queste regole?**
- 2) **Cosa succede alla particella nel tempo trascorso tra la sua emissione e la sua osservazione?** La particella sembra interagire con entrambe le fessure ma questo è inconsistente con la natura puntiforme della particella.
- 3) **Cos'è che fa sì che la particella sembri passare da un comportamento statistico a uno non statistico?** Quando la particella passa attraverso le fessure, il suo comportamento è descritto da una funzione d'onda *delocalizzata*; quando la particella viene osservata appare essere una singola *entità puntiforme*.



# La meccanica quantistica

## L'interpretazione di Copenhagen

L'*interpretazione di Copenhagen* risponde a queste domande nel modo seguente:

- 1) Le affermazioni probabilistiche fatte dalla meccanica quantistica sono **irriducibili**, nel senso che esse non riflettono la nostra conoscenza limitata di qualche variabile nascosta. Nella fisica classica, la probabilità viene usata per descrivere la nostra conoscenza non completa di un processo che è, però, **deterministico**; in meccanica quantistica, i risultati delle misurazioni sono **fondamentalmente non deterministici**.
- 2) **La fisica studia i risultati dei processi di misurazione.** Le speculazioni che vanno oltre questo fatto non possono essere giustificate. Domande come “*Dov'era la particella prima che ne misurassi la posizione?*” **non hanno senso.**
- 3) **L'atto della misurazione causa un istantaneo collasso della funzione d'onda:** il processo di misurazione “sceglie” a caso esattamente uno dei possibili stati permessi dalla funzione d'onda, e la funzione d'onda cambia istantaneamente per riflettere questa scelta.



# La meccanica quantistica

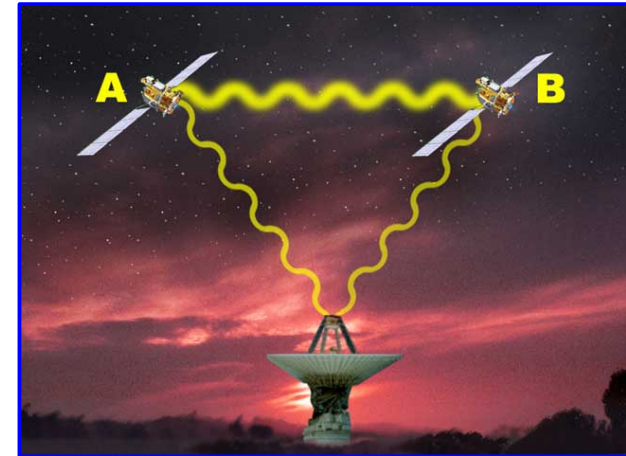
## Critiche all'interpretazione di Copenhagen

La completezza della meccanica quantistica (**tesi 1**) è stata attaccata dal *esperimento mentale di Einstein-Podolsky-Rosen* che era inteso a mostrare che ci devono essere **variabili nascoste**, se si vogliono evitare **effetti a distanza istantanei e non locali**, preservando il **realismo**.

La terza tesi è probabilmente la più problematica dal punto di vista dei fisici, **perché dà uno status speciale al processo di misurazione, senza definire chiaramente, né spiegare, i suoi effetti peculiari**.

Molti fisici e filosofi hanno mosso obiezioni all'*interpretazione di Copenhagen*, in quanto **non è deterministica** e include **un processo di misurazione indefinito**, che converte funzioni probabilistiche in misurazioni determinate. Le celebri frasi di *Albert Einstein*: “*Dio non gioca a dadi col mondo*” e “*Credi veramente che la Luna non sia lì quando non la stai guardando?*” ne sono una esemplificazione.

Diverse prove sperimentali hanno, comunque, dimostrato l'effettiva esistenza dei fenomeni di **entanglement** delle particelle, ritenuti paradossali da Einstein, dimostrando l'**insussistenza** delle **ipotesi di realismo locale**.



# La meccanica quantistica

## *Riferimenti bibliografici*

- U. Amaldi, *L'Amaldi per i licei scientifici.blu*, vol. 3, Zanichelli, 2016
- M. Born, *Fisica atomica*, Boringhieri, 1976
- A. Caforio, A. Ferilli, *Nuova Physica 2000*, voll. 2 e 3, Le Monnier, 2000
- R.M. Eisberg, *Fundamentals of Modern Physics*, John Wiley & Sons, 1961
- M. Fazio, M.C. Montano, *Fisica per i Licei Scientifici*, vol. 3, Arnoldo Mondadori Scuola, 1996
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Fondamenti di fisica – Onde*, Zanichelli, 2001
- Wikipedia [<http://it.wikipedia.org/>]